EJERCICIOS RESUELTOS DE GEOMETRÍA

1.- a) Averigua el punto simétrico de $A(5, -1)$ con respecto a $B(4, -2)$.
b) Halla el punto medio del segmento de extremos $A(5, -1)$ y $B(4, -2)$.

Solución:

a) Llamamos $A'(x, y)$ al simétrico de A con respecto a B. El punto B es el punto medio del segmento que une A con A'. Entonces:

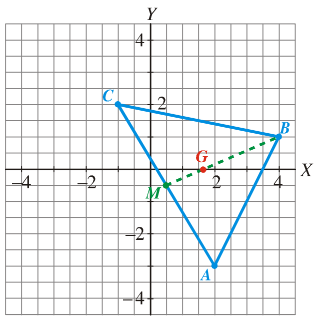
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+5}{2}=4\\ \dfrac{y-1}{2}=-2\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}x=3\\ y=-3\end{array}\right\} \quad A'(3,-3)$$

b) El punto medio es:

$$M=\left(\frac{5+4}{2},\frac{-1-2}{2}\right)=\left(\frac{9}{2},\frac{-3}{2}\right)$$

2.- Halla las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices $A(2, -3)$, $B(4, 1)$ y $C(-1, 2)$.

Solución:



Llamamos $G(x, y)$ al baricentro y $M(a, b)$ al punto medio del lado AC. Sabemos que:

$$2\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{BG}$$

Hallamos M:

$$M=\left(\frac{2+(-1)}{2},\frac{-3+2}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{GM}=\left(\dfrac{1}{2}-x\,,-\dfrac{1}{2}-y\right)\\ \overrightarrow{BG}=(x-4,\,y-1)\end{array}\right\}\quad\begin{array}{l}2\left(\dfrac{1}{2}-x,\ \dfrac{-1}{2}-y\right)=(x-4\,,\ y-1)\\ (1-2x,\,-1-2y)=(x-4,\,y-1)\end{array}$$

$$1-2x=x-4\quad\rightarrow\quad 5=3x\quad\rightarrow\quad x=\frac{5}{3}$$

$$-1-2y=y-1\quad\rightarrow\quad 0=3y\quad\rightarrow\quad y=0$$

El baricentro es:

$$G\left(\frac{5}{3},0\right)$$

3.- Escribe la ecuación implícita de la recta que pasa por $\boldsymbol{P(-1,\,2)}$ **y es paralela a** $\boldsymbol{3x-y+4=0}$**.**

Solución:

Obtenemos la pendiente de la recta dada:

$$3x-y+4=0\quad\rightarrow\quad y=3x+4\quad\rightarrow\quad pendiente=3$$

La recta paralela tiene la misma pendiente; su ecuación será:

$$y=2+3(x+1)\quad\rightarrow\quad y=2+3x+3\quad\rightarrow\quad 3x-y+5=0$$

4.- Calcula la distancia del punto $\boldsymbol{P(-3,\,5)}$ **a la recta** $\boldsymbol{r: y=2x-3}$**.**

Solución:

Expresamos la recta en forma implícita:

$$r: y=2x-3\quad\rightarrow\quad r: 2x-y-3=0$$

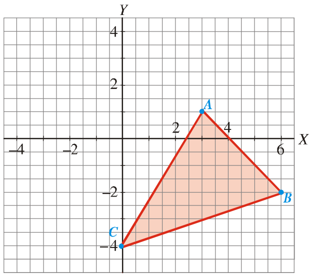
Por tanto:

$$dist\,(P,r)=\frac{|2\cdot(-3)-5-3|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|-6-5-3|}{\sqrt{5}}=\frac{14}{\sqrt{5}}=\frac{14\sqrt{5}}{5}$$

5.- Halla el área del triángulo de vértices:

***A*(3, 1)** ***B*(6, –2)** ***C*(0, –4)**

Solución



1.º) Tomamos el lado BC como base del triángulo:

$$base = \left| \overrightarrow{BC} \right| = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$$

2.º) La altura es la distancia de A a la recta que pasa por B y C. Hallamos la ecuación de dicha recta:

$$pendiente = \frac{-4+2}{0-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

$$y = -4 + \frac{1}{3}x \quad \to \quad 3y = -12 + x \quad \to \quad r: x - 3y - 12 = 0$$

Por tanto:

$$altura = dist\,(A, r) = \frac{|3-3-12|}{\sqrt{1+9}} = \frac{12}{\sqrt{10}}$$

3.º) El área del triángulo es:

$$Área = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{\sqrt{40} \cdot \frac{12}{\sqrt{10}}}{2} = 12 \text{ u}^2$$

6.- Considera los puntos *A*(–1, 3), *B*(2, 6) y *C* (*x* , *y*). Halla los valores de *x* e *y* para que *C* sea:

a) El punto medio del segmento de extremos *A* y *B*.
b) El simétrico de *A* con respecto a *B*.

Solución:

a) El punto medio es:

$$\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{3+6}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right) = (x, y) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

b) B será el punto medio del segmento que une A y C, entonces:

$$\left(\frac{-1+x}{2}, \frac{3+y}{2}\right) = (2, 6) \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{matrix} \dfrac{-1+x}{2} = 2 \\ \dfrac{3+y}{2} = 6 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} x = 5 \\ y = 9 \end{matrix}\Bigg\} \quad \rightarrow \quad C(5, 9)$$

7.- Dados los puntos *A*(2, –3), *B*(–1, 4) y *C*(*x*, 3), determina el valor de *x* para que *A*, *B* y *C* estén alineados.

Solución:

Para que los tres puntos estén alineados, las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y de $\overrightarrow{BC}$ han de ser proporcionales:

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AB} = (-3, 7) \\ \overrightarrow{BC} = (x+1, -1) \end{matrix}\right\} \quad \frac{-3}{x+1} = \frac{7}{-1} \quad \rightarrow \quad 3 = 7x + 7 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-4}{7}$$

8.- Halla la ecuación implícita de la recta perpendicular a 2*x* + *y* – 3 = 0 que pasa por el punto *P*(1, 1).

Solución:

Obtenemos la pendiente de la recta dada:

$$2x + y - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad y = -2x + 3 \quad \rightarrow \quad pendiente = -2$$

La pendiente de la perpendicular es:

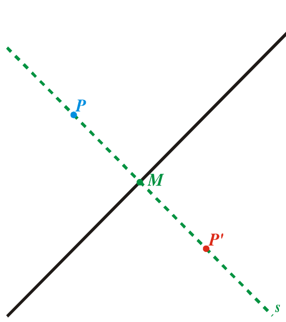
$$\frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta buscada será:

$$y = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) \quad \rightarrow \quad 2y = 2 + x - 1 \quad \rightarrow \quad x - 2y + 1 = 0$$

8.- Halla las coordenadas del punto simétrico de *P*(3, –4) respecto a la recta *r* : –3*x* + *y* + 2 = 0.

Solución



1.º) Hallamos la ecuación de la recta, *s*, que es perpendicular a *r* y que pasa por *P*:

$$r: -3x + y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad y = 3x - 2 \quad \rightarrow \quad pendiente = 3$$

La pendiente de s será $\frac{-1}{3}$. Por tanto:

$$s: y = -4 - \frac{1}{3}(x-3) \quad \rightarrow \quad 3y = -12 - x + 3$$

$$s: x + 3y + 9 = 0$$

2.º) Hallamos el punto de corte, *M*, entre *r* y *s*:

$$\left.\begin{array}{r} -3x + y + 2 = 0 \\ x + 3y + 9 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 3x - 2 \\ x + 3(3x-2) + 9 = 0 \end{array}$$

$$x + 9x - 6 + 9 = 0$$

$$10x = -3$$

$$x = \frac{-3}{10} \quad \rightarrow \quad y = \frac{-9}{10} - 2 = \frac{-29}{10}$$

El punto es $M\left(\frac{-3}{10}, \frac{-29}{10}\right)$.

3.º) Si llamamos *P'*(*x*, *y*) al simétrico de *P* con respecto a *r*, *M* es el punto medio entre *P* y *P'*. Por tanto:

$$\frac{3+x}{2} = \frac{-3}{10} \quad \rightarrow \quad 30 + 10x = -6 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-36}{10} = \frac{-18}{5}$$

$$\frac{-4+y}{2} = \frac{-29}{10} \quad \rightarrow \quad -40 + 10y = -58 \quad \rightarrow \quad y = \frac{-18}{10} = \frac{-9}{5}$$

El punto buscado es $P'\left(\frac{-18}{5}, \frac{-9}{5}\right)$.

9.- ¿Cuál ha de ser el valor de *k* para que estas dos rectas sean paralelas?

$$x + 3y - 2 = 0 \qquad\qquad kx + 2y + 3 = 0$$

Solución:

Despejamos y en cada ecuación para obtener la pendiente de cada recta:

$$x+3y-2=0 \;\rightarrow\; 3y=-x+2 \;\rightarrow\; y=\frac{-1}{3}x+\frac{2}{3} \;\rightarrow\; \text{pendiente}=-\frac{1}{3}$$

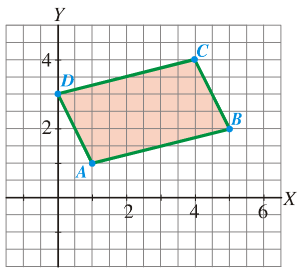
$$kx+2y+3=0 \;\rightarrow\; 2y=-kx-3 \;\rightarrow\; y=\frac{-k}{2}x-\frac{3}{2} \;\rightarrow\; \text{pendiente}=\frac{-k}{2}$$

Para que sean paralelas, las pendientes han de ser iguales:

$$-\frac{1}{3}=-\frac{k}{2} \;\rightarrow\; -2=-3k \;\rightarrow\; k=\frac{2}{3}$$

10.- Halla el área del paralelogramo de vértices *A*(1, 1), *B*(5, 2), *C*(4, 4) y *D*(0, 3).

Solución:



1.º) Tomamos como base el lado *AB*:

$$\text{base}=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$$

2.º) La altura es la distancia del vértice *C* (o del *D*) a la recta que pasa por *A* y *B*. Obtengamos la ecuación de dicha recta.

$$\text{pendiente}=\frac{2-1}{5-1}=\frac{1}{4}$$

$$r: y=1+\frac{1}{4}(x-1) \;\rightarrow\; 4y=4+x-1 \;\rightarrow\; x-4y+3=0$$

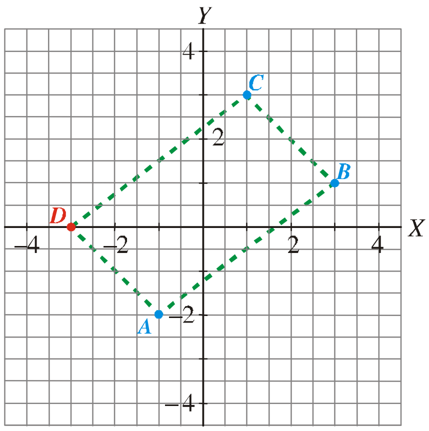
$$\text{altura}=\text{dist}\,(C,r)=\frac{|4-16+3|}{\sqrt{1+16}}=\frac{|-9|}{\sqrt{17}}=\frac{9}{\sqrt{17}}$$

Así, el área es:

$$\text{Área}=\text{base}\cdot\text{altura}=\sqrt{17}\cdot\frac{9}{\sqrt{17}}=9\ \text{u}^2$$

11.- Halla las coordenadas del vértice *D* del paralelogramo *ABCD*, sabiendo que *A*(–1, –2), *B*(3, 1) y *C*(1, 3).

Solución:



Llamamos $D(x, y)$ al cuarto vértice.
Ha de cumplirse que:

$\overline{AB} = \overline{DC}$, es decir :

$$\left.\begin{array}{l} AB = (4,\ 3) \\ DC = (1-x,\ 3-y) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{lll} 4 = 1-x & \rightarrow & x = -3 \\ 3 = 3-y & \rightarrow & y = 0 \end{array}$$

Por tanto:

$D(-3,\ 0)$

12.- Dadas las rectas:

$\boldsymbol{r: -4x + y - 3 = 0} \qquad \boldsymbol{s: kx - y + 1 = 0}$

halla el valor de *k* para que *r* y *s* sean perpendiculares.

Solución:

Obtenemos la pendiente de cada una de la rectas:

$$\begin{array}{lllll} -4x + y - 3 = 0 & \rightarrow & y = 4x + 3 & \rightarrow & pendiente = 4 \\ kx - y + 1 = 0 & \rightarrow & y = kx + 1 & \rightarrow & pendiente = k \end{array}$$

Para que *r* y *s* sean perpendiculares, ha de cumplirse que:

$$k = \frac{-1}{4}$$

13.- Halla el valor de k para que la distancia del punto $P(2, k)$ a la recta $r: \; x - y + 3 = 0$ sea $\sqrt{2}$.

Solución:

$$dist\,(P,r) = \frac{|2-k+3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|5-k|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \to \quad |5-k| = 2$$

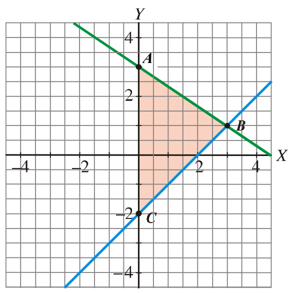
Hay dos posibilidades:

$$\begin{cases} 5-k=2 \quad \to \quad k=3 \\ 5-k=-2 \quad \to \quad k=7 \end{cases}$$

14.- Calcula los vértices y el área del triángulo cuyos lados están sobre las rectas:

$$\boldsymbol{r: x-y-2=0 \qquad s: 2x+3y-9=0 \qquad t: x=0}$$

Solución:



1.º) Los vértices del triángulo son los puntos de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} x-y-2=0 \\ 2x+3y-9=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x=y+2 \\ 2(y+2)+3y-9=0 \end{array}$$

$$2y+4+3y-9=0 \quad \to \quad 5y=5 \quad \to \quad \begin{array}{l} y=1 \\ x=3 \end{array}$$

Punto $B(3,\, 1)$

$$\left.\begin{array}{l} x-y-2=0 \\ x=0 \end{array}\right\} \quad \left. y=-2 \right\} \quad \text{Punto } C(0,-2)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y-9=0 \\ x=0 \end{array}\right\} \quad \left. y=3 \right\} \quad \text{Punto } A(0,3)$$

2.º) Tomamos el lado AC como base del triángulo:

$$base = \left|\overrightarrow{AC}\right| = 5$$

3.º) La altura es la distancia de B a la recta que pasa por A y por C (que es el eje Y). Por tanto:

$$altura = 3$$

4.º) El área del triángulo es:

$$Área = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5 \text{ u}^2$$