DOS DEMOSTRACIONES DE LA FÓRMULA DE LA COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Llamamos combinaciones con repetición de m elementos distintos tomados de n en n a todos los conjuntos de n elementos tomados entre los m dados permitiendo repetir elementos .

La fórmula para calcular el número de posibles combinaciones con repetición de m elementos distintos tomados de n en n es

$$CR\ m,n \ = \binom{m+n-1}{n} \qquad (1)$$

1º demostración:

Suponemos que los m elementos son los numeros 1,2,3 ... m. Como en las combinaciones no importa el orden podemos suponer que las combinaciones se expresan ordenadas de forma natural. Es decir una combinación con repetición para los datos dados es un conjunto de n números elegidos entre 1,2,3, ...,m que cumple :

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ \ldots \ \leq a_n \qquad (2)$$

Para esos números se puede afirmar que:

$$a_1 < a_2 + 1 < a_3 + 2 < \ldots < a_n + n - 1 \qquad (3)$$

Los números que aparecen en (3) están comprendidos entre 1 y m + n -1 y la cantidad de ellos que podemos construir es exactamente el número combinatorio (1).

Queda demostrada la fórmula porque a cada conjunto que cumpla (2) le corresponde uno y solo uno de los conjuntos que cumplen (3)

2º demostración:

Suponemos que cada elemento del conjunto de los m distintos se representa por el espacio entre dos líneas verticales del siguiente dibujo formado por m + 1 líneas verticales:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 \quad \ldots\ldots & m-1 & m & m+1 \\ | & | & | & | & | & | \end{array}$$

Elegir una combinacion con repetición de m elementos distintos tomados de n en n es equivalente a colocar n estrellas dentro de los m espacios pudiendo meter varias en un mismo espacio

1 2 3 ..... m-1 m m + 1

| * |* * * | |* | |

1 2 3 4 .... n

La posición de la primera y la última de las barras es fija y elegir una ubicación para las n estrellas es equivalente a elegir un orden entre m-1 barras y n estrellas. El número de esas posibles elecciones es el número de combinaciones sin repetición de m + n – 1 elementos tomados de n en n , es decir (1)