

## OPTIMIZACIÓN EN UNA VARIABLE

Los problemas de optimización desembocan en la búsqueda del máximo absoluto y el mínimo absoluto de una función en su dominio o en una parte de él.

Un problema típico de optimización es el siguiente:

En una determinada finca se quiere construir un pozo cilíndrico de volumen  $V$  con el mínimo hormigón posible, ¿cuál debe ser la profundidad del pozo?

Evidentemente para construir el pozo de volumen  $V$ , bastará y será necesario conocer la altura y el radio de la base ( $h$  y  $r$ ), dado que pozos de volumen  $V$  hay infinitos. Se trata, pues, de encontrar los valores de  $h$  y  $r$  para los que el hormigón utilizado es mínimo y el volumen del pozo es  $V$ . El hormigón se utiliza para construir la superficie lateral del cilindro y la superficie de la base inferior del mismo, por lo que la cantidad de éste será mínima si lo es la suma de la superficie lateral y la superficie de la base del cilindro. En términos matemáticos si  $h$  y  $r$  son la altura y el radio del cilindro, la suma de las dos superficies vendrá dada por la expresión  $2\pi rh + \pi r^2$ . Además el volumen del cilindro es  $V$ , por lo que  $\pi r^2 h = V$ , de donde  $h = \frac{V}{\pi r^2}$ . Podemos decir, entonces, que la superficie lateral más la superficie de la base de todos los conos de volumen  $V$  viene dada por  $\frac{2V}{r} + \pi r^2$ .

Obsérvese que podemos formular el problema real en términos matemáticos, como sigue:

Encontrar las dimensiones del pozo cilíndrico de mínimo hormigón posible entre todos los de volumen  $V$ , es equivalente a encontrar el mínimo absoluto de la función

$$f(r) = \frac{2V}{r} + \pi r^2.$$

Claro está que además de conocer la función que deseamos minimizar, debemos saber en qué intervalo tenemos que hacerlo. Con independencia del dominio de la función, el intervalo donde debemos minimizarla será aquél donde dicha función represente la suma de áreas de los cilindros de volumen  $V$ . Este intervalo, que no coincidirá necesariamente con el dominio de la función, es  $(0, \infty)$ . El dominio de la función es más amplio, para  $r$  negativos también existe, pero la función no representa lo que nos interesa.

Una vez escrito en términos matemáticos el problema consistirá en minimizar, en este caso, o maximizar, en otros, una función en un determinado intervalo.

Daremos aquí unos criterios para maximizar o minimizar funciones en distintos intervalos aplicándolos posteriormente, como ejemplo, al problema anterior.

Dada una función  $f(x)$  definida en el intervalo  $I$ , se dice que  $f$  alcanza el máximo absoluto en  $x_0$ , si  $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in I$ ,  $f(x_0)$  es el máximo de la función. Análogamente, se dice que  $f$  alcanza el mínimo absoluto en  $y_0$ , si  $f(y_0) \leq f(x) \forall x \in I$ ,  $f(y_0)$  es el mínimo absoluto.

Un importante teorema de existencia asegura que las funciones continuas en un intervalo cerrado,  $[a, b]$ , tienen máximo y mínimo absoluto. Es evidente que este teorema no permite el cálculo de los máximos y mínimos pero, al menos, proporciona la seguridad de que lo buscado existe.

Teorema 1: Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una función que alcanza el máximo absoluto en  $x_0 \in (a, b)$ , si  $f$  es derivable en  $x_0$  entonces  $f'(x_0) = 0$ .

Demostración:  $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ , puesto que  $f(x_0)$  es el máximo absoluto de la función en el intervalo  $(a, b)$ , se tiene que  $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$ , lo que implica, para  $h > 0$ ,  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$  y, para  $h < 0$ ,  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$ , por lo que  $f'(x_0)$  no puede ser otra cosa que 0.

Teorema 2: Sea  $f : (a, b) \rightarrow R$  una función que alcanza el mínimo absoluto en  $x_0 \in (a, b)$ , si  $f$  es derivable en  $x_0$  entonces  $f'(x_0) = 0$ .

Manejando convenientemente el teorema de existencia y los dos teoremas precedentes se puede calcular el máximo absoluto y el mínimo absoluto de una función continua en un intervalo cerrado.

Efectivamente, sea  $f : [a, b] \rightarrow R$  una función continua, por lo que el máximo y el mínimo absolutos existen.

Si el máximo o el mínimo se alcanzan en el interior del intervalo, es decir en  $(a, b)$ , y la función es derivable, se tiene que  $f'(x) = 0$ . Por tanto, el máximo y el mínimo absoluto se obtendrá buscando los puntos que satisfacen la ecuación  $f'(x) = 0$ , los puntos donde la función no es derivable y los extremos del intervalo,  $a$  y  $b$ . Obtenidos todos estos puntos, se sustituyen en la función y el más grande será el máximo, siendo el mínimo el más pequeño.

El problema se complica ligeramente si la función está definida en un intervalo abierto. En este caso, si la función es derivable, el máximo o el mínimo absoluto, en caso de que existan, se alcanzarán en los puntos que cumplan  $f'(x) = 0$ . Localizados estos puntos tendremos que estudiar el comportamiento de la función en el intervalo de interés para definir claramente qué punto es el máximo, qué punto es el mínimo o si no existen uno u otro. Los instrumentos que se pueden utilizar para el estudio del comportamiento de un punto candidato a máximo o mínimo absoluto, es el signo de la primera derivada. Derivada positiva a la derecha del punto y negativa a la izquierda, indica crecimiento a la derecha del punto y decrecimiento a la izquierda, lo que implicaría que el punto es un mínimo absoluto, siempre que este crecimiento se mantenga en todo el intervalo a la derecha del punto y el decrecimiento se mantenga en todo el intervalo a la izquierda del punto. Análogamente, derivada positiva a la izquierda del punto y negativa a la derecha del punto indica que en éste se alcanza un mínimo absoluto.

El estudio de la función tendrá que ser más detallado si el crecimiento o decrecimiento no se mantienen en todo el intervalo a la derecha o izquierda del punto que hizo cero la función derivada, y, por tanto, candidato a máximo o mínimo.

Si el intervalo es semiabierto se procederá como en el caso de intervalo abierto, incluyendo en el estudio el extremo del intervalo que corresponda.

En el ejemplo con que empezamos el estudio de la optimización el intervalo en el que se desea encontrar el mínimo de la función es  $(0, \infty)$ , por lo que, de momento, sólo podremos buscar los candidatos, éstos serán los que hagan cero la derivada de la función  $f(r) = \frac{2V}{r} + \pi r^2$ , como sabemos  $f'(r) = \frac{-2V}{r^2} + 2\pi r$ , los candidatos a mínimo absoluto serán los valores de  $r$  que hagan cero la ecuación  $\frac{-2V}{r^2} + 2\pi r = 0$ , es decir el candidato es  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ . Para determinar si este punto es un máximo o un mínimo o nin-

guna de las dos cosas, observemos que  $f'(r) > 0 \quad \forall r > \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$  y  $f'(r) < 0 \quad \forall r < \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ , por lo que la función se mantiene creciente a la derecha del candidato y decreciente a la izquierda del candidato, lo que determina que  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$  es el punto donde  $f$  alcanza el mínimo absoluto.

La traducción a la situación real de este resultado matemático no puede ser más evidente. El pozo cilíndrico de volumen  $V$  con mínimo gasto de hormigón es

aquel que tenga por radio de la base  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$  y por altura  $h = \frac{V}{\pi \left( \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \right)^2}$ , siendo la cantidad de hormigón mínima a utilizar  $f\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)$ .