

LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN UN PUNTO P ES, DE TODAS LAS RECTAS QUE PASAN POR P, LA QUE MÁS SE APROXIMA A LA CURVA EN UN ENTORNO DE P.

No son pocos, todavía, los que definen recta tangente a una curva como aquella que toca (corta) a ésta en un sólo punto.

Nada más lejos de la realidad, no sólo porque la recta tangente puede cortar en más de un punto a la curva e, incluso, rectas no tangentes pueden cortar una sola vez a la curva, sino porque la tangente se define para otros propósitos.

Concretamente, se pretende sustituir el estudio de la curva por el estudio de su tangente en las inmediaciones del punto de tangencia, en adelante P.

Será la tangente una recta con la que podremos evaluar la curva en los puntos próximos a P, por lo que tendrá que ser la mejor de las rectas que pasan por P.

Mejor, en este caso, significa la que más se aproxima a la curva.

En este pequeño documento matemático, trabajaremos con curvas cuya ecuación sea de la forma $y = f(x)$.

Sea $f : I \rightarrow R$ una función derivable en $x_0 \in I$. La gráfica de f será una curva que denominaremos L. Sea P el punto de L de coordenadas; $P(x_0, f(x_0))$, se define la tangente a L en P como la recta de ecuación $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, donde, como se sabe, $f'(x_0)$ es la derivada de la función f en el punto x_0 .

Cualquier otra recta R que pase por P tendrá por ecuación $y = f(x_0) + m(x - x_0)$, con $m \neq f'(x_0)$.

De acuerdo con lo que se ha comentado en la introducción, se pretende que la recta tangente sea, de todas las rectas que pasan por P, la que más se aproxima a la curva L.

Para ello y, en primer lugar, debemos fijar la idea de proximidad. Si $x \in I$, el valor de y en la curva será $f(x)$, en la tangente, T, será $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ y en la recta R, $f(x_0) + m(x - x_0)$. Es evidente que la diferencia entre la función en el punto x y el valor de y en la tangente en dicho punto, $D_T = |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)|$, es una buena medida de la proximidad entre tangente y curva. De la misma manera, la diferencia entre el valor de la función en el punto x y el valor de y en la recta R en dicho punto, $D_R = |f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)|$, mide la proximidad entre recta y curva.

Llamando, como en el párrafo anterior, D_T y D_R a estas diferencias, en valor absoluto, demostrar que la tangente se aproxima más a L, en un entorno de P, que cualquier recta R, será equivalente a demostrar que $D_T < D_R$ en un entorno de x_0 .

Para verlo, obsérvese que:

$$\frac{D_T}{|x - x_0|} = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| \text{ y } \frac{D_R}{|x - x_0|} = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \right|, \text{ por lo que se}$$

puede asegurar que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{D_T}{|x - x_0|} = 0$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{D_R}{|x - x_0|} = |f'(x_0) - m| > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ tal que

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}, \frac{D_T}{|x - x_0|} < \frac{D_R}{|x - x_0|} \Leftrightarrow D_T < D_R \text{ c.q.d.}$$